

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

Численные методы математического анализа

Методические указания
к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Математический анализ»

В двух частях

Часть 2

Составители:
Н. Ф. Добрынина, Д. В. Тарасов

Пенза
Издательство ПГУ
2013

УДК 621.791

Ч-67

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования
Пензенского государственного университета

Ю. Г. Смирнов;

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин
Пензенского филиала Военной академии
материально-технического обеспечения
имени генерала армии А. В. Хрулева

О. А. Голованов

Численные методы математического анализа : метод.
Ч-67 указания к выполнению лабораторных вычислительных работ
по курсу «Математический анализ» : в 2 ч. / сост.: Н. Ф. Доб-
рынина, Д. В. Тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – Ч. 2. – 60 с.

Издание содержит необходимые теоретические сведения для успешного выполнения лабораторных работ по курсу «Численные методы математического анализа». Включает описание методики выполнения, варианты задач, пример оформления хода и необходимых расчетов работы. Изложение материала сопровождается детальным описанием вычислительных алгоритмов математического анализа и требует от обучающихся проведения сравнительного анализа эффективности существующих (предложенных) методов.

Работа подготовлена на кафедре высшей и прикладной математики ПГУ и предназначена для студентов кафедры систем автоматизированного проектирования, изучающих курс «Математический анализ», а также может быть использована студентами других специальностей при изучении высшей математики.

УДК 621.791

© Пензенский государственный
университет, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Общие методические указания.....	5
Лабораторная работа № 5. Вычисление кратных интегралов.....	6
Лабораторная работа № 6. Разложение функций в ряд.....	13
Лабораторная работа № 7. Методы оптимизации.....	20
Лабораторная работа № 8. Численный гармонический анализ.....	30
Список литературы.....	44
Приложение.....	45

Введение

Выполняя лабораторные работы «Численные методы математического анализа», студенты изучают основы и методику решения задач прикладной математики.

В результате изучения этого курса студент должен знать численные методы математического анализа, уметь применять их при решении задач, составлять вычислительные программы и оформлять результат решения в виде бланков и таблиц.

Методические указания состоят из двух частей. Вторая часть методических указаний содержит работы по следующим темам:

1. Вычисление кратных интегралов.
2. Разложение функций в ряды.
3. Методы оптимизации.
4. Численный гармонический анализ.

В указаниях для каждого метода изложена теория и даны варианты заданий.

Общие методические указания

Порядок выполнения работы:

1. Получить у преподавателя задание на выполнение очередной работы (вариант и дополнительные указания).
2. Разработать структуру и алгоритм решения данной лабораторной работы.
3. Реализовать алгоритм в виде текста на языке MathCAD.
4. Подготовить текстовые наборы данных, необходимые для отладки программы и демонстрации ее работоспособности.
5. Отладить полученную программу, используя подготовленные ранее текстовые наборы данных, и сравнить полученные результаты с ожидаемыми результатами. В случае совпадения можно сделать вывод, что программа работает правильно. В противном случае необходимо продолжить отладку программы.
6. Отлаженную программу исполнить в пошаговом режиме с остановками в контрольных точках, тщательно проверяя полученные промежуточные результаты. Проанализировать полученные конечные результаты.
7. Подготовить и сдать преподавателю отчет о работе.

Лабораторная работа № 5

Вычисление кратных интегралов

5.1. Кубатурные формулы

Кубатурные формулы предназначены для вычисления двойных интегралов.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой ограниченной области σ (рис. 5.1).

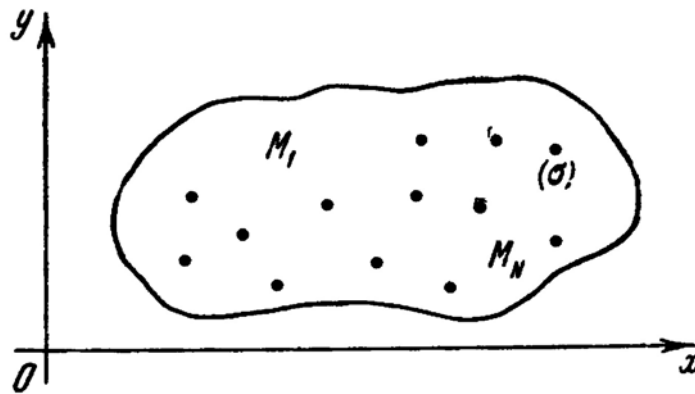


Рис. 5.1

В области σ выбирается система узлов $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Для вычисления двойного интеграла полагают

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^N A_i f(x_i, y_i). \quad (1)$$

Чтобы найти коэффициенты A_i , потребуем точного выполнения кубатурной формулы (1) для всех полиномов

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l \leq n} c_{kl} x^k y^l, \quad (2)$$

степень которых не превышает заданного числа n . Для этого необходимо и достаточно, чтобы формула (1) была точной для произведения степеней $x^k y^l$ ($k, l = 0, 1, \dots, n; k + l \leq n$). Полагая в формуле (1) $f(x, y) = x^k y^l$, будем иметь

$$I_{kl} = \iint_{\sigma} x^k y^l dx dy = \sum_{i=1}^N A_i x_i^k y_i^l \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots, n; k + l \leq n). \quad (3)$$

Таким образом, коэффициенты A_i могут быть определены из системы линейных уравнений (3).

Для того чтобы система уравнений (3) была определенной, необходимо, чтобы число неизвестных N было равно числу уравнений.

Рассмотрим еще один прием вычисления двойного интеграла. Пусть область интегрирования ограничена непрерывными однозначными кривыми

$$y = \varphi(x), y = \psi(x) \quad (\varphi(x) \leq \psi(x))$$

и двумя вертикалями $x = a, x = b$ (рис. 5.2).

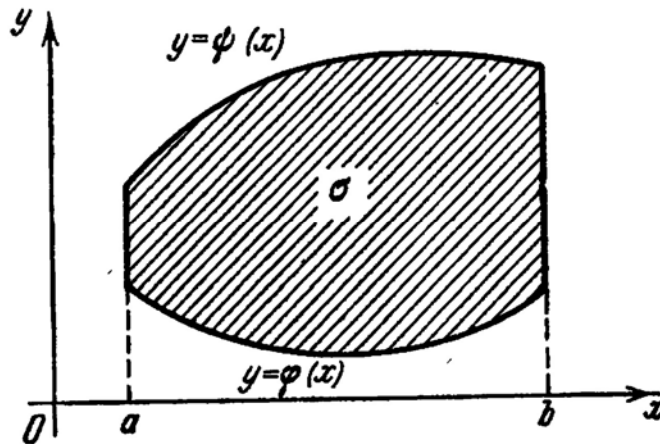


Рис. 5.2

Расставляя по известным правилам в двойном интеграле пределы интегрирования, получим

$$I = \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

Пусть

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad (5)$$

тогда

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx. \quad (6)$$

Применяя к однократному интегралу, стоящему в правой части равенства (6), одну из квадратурных формул, получим

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n A_i F(x_i), \quad (7)$$

где $x_i \in [a, b]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и A_i – некоторые постоянные коэффициенты. В свою очередь значения

$$F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x_i, y) dy$$

могут быть найдены по одной из формул квадратур

$$F(x_i) = \sum_{l=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j),$$

где B_{ij} – соответствующие постоянные.

Из формулы (7) выводим

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_i, y_j), \quad (8)$$

где A_i и B_{ij} – известные постоянные.

Для кубатурных формул типа (8) сохраняют силу общие замечания, относящиеся к вычислению однократных интегралов.

5.2. Кубатурные формулы типа Симпсона

Пусть сначала область интегрирования есть прямоугольник

$$R \{a \leq x \leq A; b \leq y \leq B\}$$

(рис. 5.3), стороны которого параллельны осям координат. Каждый из промежутков $[a, A]$ и $[b, B]$ разобьем пополам точками

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h = A;$$

$$y_0 = b, y_1 = b + k, y_2 = b + 2k = B,$$

где $h = \frac{A-a}{2}$, $k = \frac{B-b}{2}$.

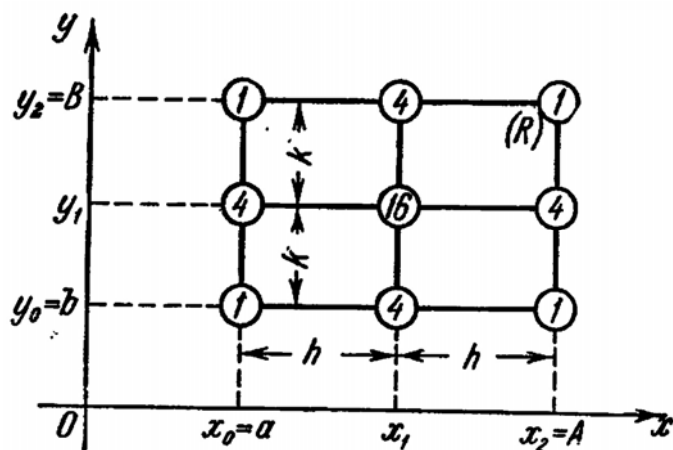


Рис. 5.3

Всего, таким образом, получим девять точек (x_i, y_j) ($i, j = 0, 1, 2, \dots, 9$). Имеем

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy. \quad (1)$$

Вычисляя внутренний интеграл по квадратурной формуле Симпсона, находим

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_a^A dx \cdot \frac{k}{3} [f(x, y_0) + 4f(x, y_1) + f(x, y_2)] = \\ &= \frac{k}{3} \left[\int_a^A f(x, y_0) dx + 4 \int_a^A f(x, y_1) dx + \int_a^A f(x, y_2) dx \right]. \end{aligned}$$

Применяя к каждому интегралу формулу Симпсона, получим

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + 4f(x_1, y_0) + f(x_2, y_0)] + \\ &+ 4[f(x_0, y_1) + 4f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1)] + \\ &+ [f(x_0, y_2) + 4f(x_1, y_2) + f(x_2, y_2)] \}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \frac{hk}{9} \{ [f(x_0, y_0) + f(x_2, y_0) + f(x_0, y_2) + f(x_2, y_2)] + \\ &+ 4[f(x_1, y_0) + f(x_0, y_1) + f(x_2, y_1) + f(x_1, y_2)] + 16f(x_1, y_1) \}. \quad (2) \end{aligned}$$

Формула (2) называется *кубатурной формулой Симпсона*. Эту формулу можно записать в другом виде:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2),$$

где σ_0 – сумма значений подынтегральной функции $f(x, y)$ в вершинах прямоугольника R ; σ_1 – сумма значений $f(x, y)$ в серединах сторон прямоугольника R ; $\sigma_2 = f(x_1, y_1)$ – значение функции $f(x, y)$ в центре прямоугольника R .

Кратности этих значений обозначены на рис. 5.3.

Если размеры прямоугольника R велики, то для увеличения точности кубатурной формулы (2) область R разбивают на систему прямоугольников, к каждому из которых применяют кубатурную формулу Симпсона.

Положим, что стороны прямоугольника R разделили на n и m равных частей, в результате получилась сеть nm прямоугольников (рис. 5.4). Каждый из этих прямоугольников в свою очередь разделим на четыре равные части. Вершины этой мелкой сети прямоугольников примем за узлы M_{ij} кубатурной формулы.

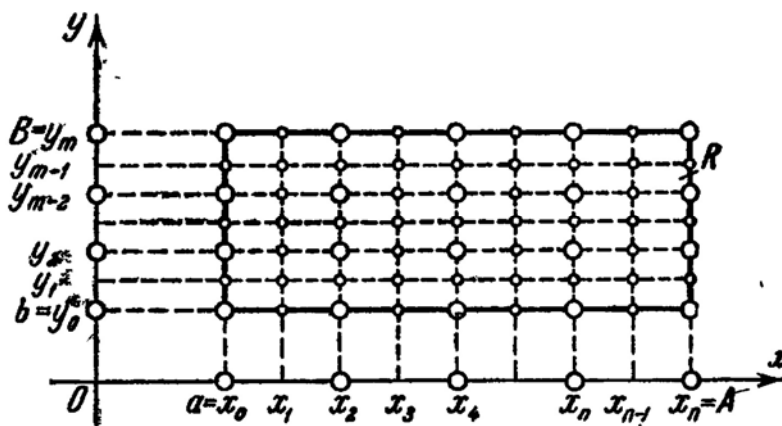


Рис. 5.4

Пусть

$$h = \frac{A-a}{2n} \quad \text{и} \quad k = \frac{B-b}{2m}.$$

Тогда сеть узлов будет иметь следующие координаты:

$$x_i = x_0 + ih \quad (x_0 = a; i = 0, 1, 2, \dots, 2n);$$

$$y_j = y_0 + jk \quad (y_0 = b; j = 0, 1, 2, \dots, 2m).$$

Введем обозначение

$$f(x_i, y_j) = f_{ij}.$$

Применяя формулу (2) к каждому из прямоугольников, будем иметь

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[(f_{2i,2j} + f_{2i+2,2j} + f_{2i,2j+2}) + 4(f_{2i+1,2j} + f_{2i+2,2j+1} + f_{2i+1,2j+2} + f_{2i,2j+1}) + 16f_{2i+1,2j+1} \right].$$

Отсюда окончательно находим

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \frac{hk}{9} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \lambda_{ij} f_{ij}, \quad (3)$$

где коэффициенты λ_{ij} являются соответствующими элементами матрицы

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 8 & 4 & 8 & 4 & \dots & 8 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & \dots & 16 & 8 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \dots & 4 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если область интегрирования σ криволинейная, то строим прямоугольник $R \supset \sigma$, стороны которого параллельны осям координат (рис. 5.5).

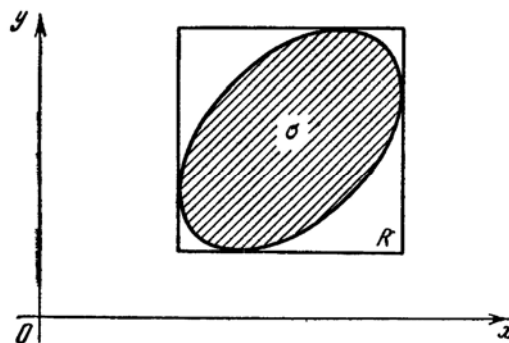


Рис. 5.5

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } (x, y) \in \sigma; \\ 0, & \text{если } (x, y) \in R - \sigma. \end{cases}$$

В таком случае имеем

$$\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy.$$

Задание

1. Вычислить приближенно двойной интеграл с помощью кубатурной формулы, используя квадратурные формулы прямоугольников.
2. Вычислить приближенно двойной интеграл с помощью кубатурной формулы Симпсона.
3. Вычислить двойной интеграл аналитически. Найти погрешности вычислений во всех случаях приближенного вычисления двойного интеграла.

Лабораторная работа № 6

Разложение функций в ряд

6.1. Улучшение сходимости числовых рядов

Ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

сходится медленно, если нужно взять большое число членов ряда, чтобы получить его сумму с заданной степенью точности.

Непосредственное нахождение суммы медленно сходящегося ряда с заданной точностью ε затруднительно. Поэтому важное значение приобретают преобразования рядов, улучшающие их сходимость. Мы будем использовать *преобразование Куммера*.

Пусть ряд (1) сходится и его сумма равна A . Подберем вспомогательный сходящийся ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (b_n \neq 0), \quad (2)$$

сумма которого известна и равна B , причем существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q \neq 0. \quad (3)$$

Тогда имеем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = q \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n),$$

или

$$A = B + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - qb_n). \quad (4)$$

Нахождение суммы ряда (1) заменяется нахождением суммы ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_n - qb_n). \quad (5)$$

Остаток ряда (5) \bar{R}_N может быть записан в следующем виде:

$$\bar{R}_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - qb_n) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - q \frac{b_n}{a_n}\right) a_n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n a_n,$$

где $\varepsilon_n = 1 - q \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Поэтому ряд (5) сходится быстрее исходного ряда (1). Основная трудность применения преобразования Куммера состоит в удачном подборе вспомогательного ряда (2).

Рассмотрим применение этого преобразования для знакоположительного ряда (1), члены которого a_n есть рациональные функции целочисленной переменной n

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^p + \alpha_1 n^{p-1} + \dots + \alpha_p}{\beta_0 n^q + \beta_1 n^{q-1} + \dots + \beta_q} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где p и q – целые неотрицательные числа. Для сходимости ряда с общим членом (6) необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$q \geq p + 2.$$

В этом случае

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Рассмотрим вспомогательные ряды

$$S^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Поскольку

$$\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} \right],$$

то

$$S_N^{(m)} = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \dots m} - \frac{1}{(N+1)(N+2)\dots(N+m)} \right].$$

Следовательно,

$$S^{(m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{(m)} = \frac{1}{mm!}. \quad (8)$$

Используя идею Стирлинга, общий член ряда, определяемый формулой (6), представим в виде конечной суммы обратных факториалов:

$$a_n = \frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)} + a_n^{(m)},$$

где A_1, A_2, \dots, A_m – неопределенные коэффициенты; $a_n^{(m)}$ – остаточный член. Подберем коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) так, чтобы

$$a_n^{(m)} = O\left(\frac{1}{n^{2+m}}\right).$$

Для этого достаточно коэффициенты A_i последовательно определять по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(n+1)a_n, \\ A_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \frac{A_1}{n(n+1)} \right] n(n+1)(n+2), \\ &\dots \\ A_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[a_n - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{n(n+1)\dots(n+i)} \right] n(n+1)\dots(n+m). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно схеме за вспомогательный ряд (2) примем

$$\begin{aligned} B &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)} \right] = \\ &= A_1 S^{(1)} + A_2 S^{(2)} + \dots + A_m S^{(m)} = \frac{A_1}{1 \cdot 1!} + \frac{A_2}{2 \cdot 2!} + \dots + \frac{A_m}{m \cdot m!}, \end{aligned} \quad (10)$$

причем очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

и

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = B + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}. \quad (11)$$

Поскольку быстрая сходимость дополнительного ряда $\sum_{m=1}^{\infty} a_n^{(m)}$ обнаруживается лишь при достаточно большом n , то удобно выполнять указанное преобразование, начиная лишь с некоторого члена ряда a_{p+1} . Полагая

$$S = \sum_{n=1}^p a_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} S &= S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{A_1}{n(n+1)} + \frac{A_2}{n(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{A_m}{n(n+1)\dots(n+m)} + a_n^{(m)} \right] = \\ &= S_p + A_1 \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \dots + \\ &+ \frac{A_m}{m} \sum_{n=p+1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+m)} \right] + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)} = \\ &= S_p + A_1 \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{A_m}{m} \frac{1}{(p+1)\dots(p+m)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(m)}. \end{aligned}$$

В частности, при $m \rightarrow \infty$ получим *разложение Стирлинга*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^p a_n + A_1 \frac{1}{p+1} + \frac{A_2}{2} \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \dots + \\ &+ \frac{A_m}{m} \frac{1}{(p+1)(p+2)\dots(p+m)} + \dots \end{aligned}$$

6.2. Улучшение сходимости степенных рядов методом Эйлера – Абеля

Рассмотрим сходящийся степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1)$$

где $f(x)$ – сумма ряда.

Пусть радиус сходимости R ряда (1) конечен и отличен от нуля. Тогда, заменив переменную по формуле $t = \frac{x}{R}$, получим степенной ряд относительно переменной t с радиусом сходимости $\rho = 1$. Поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем считать $R = 1$.

Запишем ряд (1) в виде

$$f(x) = a_0 + x\varphi(x), \quad (2)$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n. \quad (3)$$

Умножая обе части равенства (3) на бином $(1-x)$, получим

$$(1-x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}. \quad (4)$$

Полагая во второй сумме $n+1 = m$ и учитывая, что сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Поэтому

$$(1-x)\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n,$$

где

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) -$$

конечные разности первого порядка коэффициентов a_n .

Из формул (3) и (4) выводим

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n.$$

Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n. \quad (5)$$

Указанное преобразование степенного ряда называется *преобразованием Эйлера – Абеля*. Аналогично, применив преобразование Эйлера – Абеля к степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n,$$

где

$$\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n -$$

конечные разности второго порядка коэффициентов a_n .

На основании формулы (5) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n.$$

Повторяя последовательно p раз преобразование Эйлера – Абеля, будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \dots + \frac{x^{p-1}\Delta^{p-1}a_0}{(1-x)^p} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n,$$

где

$$\Delta^p a_n = \Delta^{p-1} a_{n+1} - \Delta^{p-1} a_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) -$$

конечные разности p -го порядка коэффициентов a_n .

Таким образом,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n, \quad (6)$$

где $\Delta^0 a_0 = a_0$.

Формула (6) теряет смысл при $x=1$. Применительно к этому случаю можно видоизменить преобразование Эйлера – Абеля. Полагая $x = -t$, будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k \left[(-1)^n a_n \right]_{n=0} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} + \left(\frac{t}{1-t}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p \left[(-1)^n a_n \right] t^p. \end{aligned}$$

Возвращаясь к прежней переменной, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \Delta^k \left[(-1)^k a_n \right]_{n=0} \times \\ &\times \frac{x^k}{(1+x)^k} + \left(\frac{x}{1+x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+p} \Delta^p \left[(-1)^n a_n \right] x^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Формула (7) имеет смысл и при $x = 1$.

Задание

1. Найти сумму ряда с точностью до 0,001 с помощью преобразования Круммера. Разложить функцию по формуле (10), найти коэффициенты разложения, определить число слагаемых ряда, найти сумму ряда и определить абсолютную погрешность вычислений.

2. Найти с точностью 0,001 сумму степенного ряда при $x = -1$. Применяем преобразование Эйлера два раза ($p = 2$), используем формулу (6), оцениваем остаток ряда, по нему определяем количество слагаемых, вычисляем сумму ряда и определяем абсолютную погрешность вычислений.

Лабораторная работа № 7

Методы оптимизации

7.1. Основные понятия

1. Определения. Под *оптимизацией* понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. С точки зрения инженерных расчетов методы оптимизации позволяют выбрать наилучший вариант конструкции, наилучшее распределение ресурсов и т.п.

В процессе решения задачи оптимизации необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, определяющих данную задачу. При решении их принято называть *проектными параметрами*, а в экономических задачах их называют *параметрами плана*. Число n проектных параметров x_1, x_2, \dots, x_n характеризует размерность задачи оптимизации.

Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины, определяемой проектными параметрами. Эта величина называется *целевой функцией*, или *критерием качества*. В процессе решения задачи оптимизации должны быть найдены такие значения проектных параметров, при которых целевая функция имеет минимум или максимум. Целевая функция – это глобальный критерий оптимальности в математических моделях, с помощью которых описываются инженерные или экономические задачи.

Целевую функцию можно записать в виде

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Примерами целевой функции являются прочность или масса конструкции, стоимость перевозок грузов, прибыль.

Следует отметить, что целевая функция может быть представлена в виде формул, может принимать только некоторые дискретные значения, может задаваться в виде таблицы. Во всех случаях она должна быть однозначной функцией проектных параметров.

Целевых функций может быть несколько. Например, при проектировании изделий машиностроения одновременно требуется обеспечить максимальную надежность, минимальную материалоемкость, максимальную грузоподъемность. Некоторые целевые функции оказываются несовместимыми. В таких случаях необходимо вводить приоритет той или иной целевой функции.

2. Задачи оптимизации. Можно выделить два типа задач оптимизации – безусловные и условные. *Безусловная задача* оптимизации состоит в отыскании максимума или минимума действительной переменной (1) от n действительных переменных и определении соответствующих значений аргументов на некотором множестве σ n -мерного пространства. Обычно рассматриваются задачи минимизации, к ним сводятся задачи на поиск максимума путем замены знака целевой функции на противоположный.

Условные задачи оптимизации, или *задачи с ограничениями*, – это такие, при формулировке которых задаются некоторые условия на множестве σ . Эти ограничения задаются совокупностью некоторых функций, удовлетворяющих уравнениям или неравенствам.

7.2. Одномерная оптимизация

1. Задачи на экстремум. *Одномерная задача оптимизации* формулируется следующим образом. Найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции $y = f(x)$, заданной на множестве σ , и определить значение проектного параметра $x \in \sigma$, при котором целевая функция принимает экстремальное значение. Существование решения поставленной задачи вытекает из следующей теоремы.

Теорема Вейерштрасса. *Всякая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает на этом отрезке наименьшее и наибольшее значения, т.е. на отрезке $[a, b]$ существуют такие точки x_1 и x_2 , что для любого $x \in [a, b]$ имеют место неравенства*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Эта теорема не доказывает единственности решения. Возможны достижения равных экстремальных значений сразу в нескольких точках данного отрезка. В частности, такая ситуация имеет место для периодической функции, рассматриваемой на отрезке, содержащем несколько периодов.

Рассмотрим методы оптимизации для разных классов целевых функций. Простейшим из них является случай дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, причем функция задана в виде аналитической зависимости $y = f(x)$ и может быть найдено явное выражение для ее производной $f'(x)$. Нахождение экстремумов таких функций можно проводить известными из курса математического анализа методами. Напомним решение.

Функция $f(x)$ может достигать своего наименьшего и наибольшего значения либо в граничных точках отрезка $[a, b]$, либо в точках минимума и максимума. Эти точки должны быть критическими, т.е. производная $f'(x)$ в этих точках обращается в нуль. Следовательно, для определения наименьшего или наибольшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно вычислить ее значения во всех критических точках данного отрезка и в его граничных точках и сравнить полученные значения.

Если уравнение $f'(x) = 0$ является нелинейным, то для отыскания критических точек применяют метод Ньютона решения нелинейных уравнений.

Если целевая функция задана в табличном виде или может быть вычислена при некоторых дискретных значениях аргумента, используют различные *методы поиска*. Они основаны на вычислении целевой функции в отдельных точках и выборе среди них наибольшего и наименьшего значений.

2. Метод Ньютона. Задача одномерной оптимизации дифференцируемой функции $f(x)$ сводится к нахождению критических точек этой функции, определяемых уравнением

$$f'(x) = 0. \quad (1)$$

Когда уравнение (1) нельзя решить аналитически, для его решения можно применить численный метод Ньютона. Тогда говорят о *методе Ньютона решения задачи оптимизации*.

Пусть $x = c$ – решение уравнения (1), а c_0 – некоторое начальное приближение к c . Применим для решения уравнения (1) метод Ньютона при $F(x) = f'(x)$. Для этого в формулу для k -го приближения метода Ньютона подставим вместо $F(x)$ производную $f'(x)$ и получим формулу k -го приближения к решению уравнения (1):

$$c_k = c_{k-1} - \frac{f'(c_{k-1})}{f''(c_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для использования этой формулы необходимо, чтобы $f''(c_{k-1}) \neq 0$. В качестве критерия окончания итерационного процесса можно применять условия близости двух последовательных приближений

$$|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon$$

или близости значений целевой функции на этих приближениях

$$|f(c_k) - f(c_{k-1})| < \varepsilon.$$

Достаточное условие сходимости метода Ньютона можно получить, опираясь на следующую теорему.

Теорема. Пусть $x = c$ – корень уравнения (1), т.е. $f'(c) = 0$, а $f''(c) \neq 0$ и $f'''(x)$ непрерывна. Тогда существует окрестность D корня c ($c \in D$) такая, что если начальное приближение c_0 принадлежит этой окрестности, то для метода Ньютона (2) последовательность значений $\{c_k\}$ сходится к c при $k \rightarrow \infty$.

Заметим, что точка $x = c$ может быть как точкой минимума, так и точкой максимума, а может (при $f''(c) = 0$) вообще не являться точкой экстремума. Если функция $f(x)$ имеет как минимумы, так и максимумы, то c_k может сходиться и к точкам минимума, и к точкам максимума в зависимости от того, из окрестности какой критической точки взято начальное приближение. При этом, в отличие от других методов оптимизации, формула для поиска максимума функции совпадает с формулой для поиска минимума.

Относительно сходимости метода Ньютона решения задачи оптимизации нужно отметить, что он обладает более быстрой сходимостью по сравнению с другими методами, не использующими дифференциальные свойства функции.

7.3. Многомерные задачи оптимизации

1. Минимум функции нескольких переменных. В большинстве задач оптимизации целевая функция зависит от многих проектных параметров.

Минимум дифференцируемой функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно найти, исследуя ее значения в критических точках, которые определяются из решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (1)$$

Рассмотренный метод можно использовать только для дифференцируемых функций. В этом случае могут возникнуть трудности при решении системы нелинейных уравнений.

2. Метод покоординатного спуска. Пусть требуется найти наименьшее значение целевой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В качестве начального приближения выберем в n -мерном пространстве некото-

рую точку M_0 с координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Зафиксируем все координаты функции u , кроме первой. Тогда $v(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ – функция одной переменной x_1 . Первый шаг процесса оптимизации состоит в спуске по координате x_1 в направлении убывания функции v от точки M_0 до некоторой точки $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Если функция f дифференцируемая, то значение $x_1^{(1)}$ может быть найдено по формуле

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - \alpha_1^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0). \quad (2)$$

Здесь $\alpha_1^{(1)} > 0$ – некоторый шаг. Соотношение (2) определяет движение в сторону уменьшения значений функции v .

Значение $x_1^{(1)}$ можно найти иначе. Можно решить одномерную задачу оптимизации для функции $v(x_1)$. Тогда функция v в точке M_1 примет наименьшее значение, т.е. функция u примет в этой точке наименьшее значение по координате x_1 при фиксированных остальных координатах.

Зафиксируем теперь все координаты, кроме x_2 , и рассмотрим функцию этой переменной $w(x_2) = f(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Снова осуществим спуск (теперь по координате x_2) в сторону убывания функции w от точки M_1 до точки $M_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Значение $x_2^{(1)}$ можно найти либо как

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - \alpha_2^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_1),$$

либо решив задачу одномерной оптимизации для функции $w(x_2)$.

Аналогично проводится спуск по координатам x_3, x_4, \dots, x_n , а затем процедура снова повторяется от x_1 до x_n и т.д. В результате этого процесса получается последовательность точек M_0, M_1, \dots , в которых значения целевой функции составляют монотонно убывающую последовательность $f(M_0) \geq f(M_1) \geq \dots$

В качестве критерия завершения итерационного процесса можно использовать условия близости значений проектных параметров или целевой функции на двух последовательных итерациях. Под итерацией здесь следует понимать всю процедуру спуска по координатам от x_1

до x_n . Близость значений целевой функции можно трактовать как выполнение условия

$$\left| f\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) - f\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}\right) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Метод покоординатного спуска сводит задачу о нахождении наименьшего значения функции многих переменных к многократному спуску в сторону уменьшения значений функции по каждому переменному. Данный метод можно проиллюстрировать геометрически для случая функции двух переменных $z = f(x, y)$. На рис. 7.1 нанесены линии уровня этой поверхности.

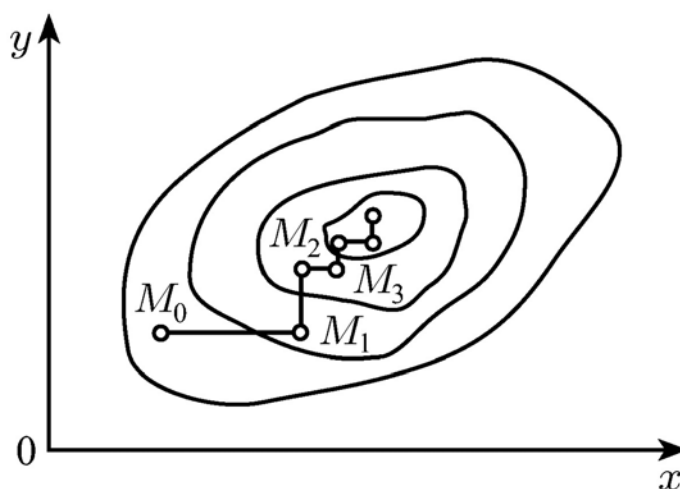


Рис. 7.1

Процесс оптимизации в этом случае проходит следующим образом. Точка $M_0(x_0, y_0)$ описывает начальное приближение. Проводя спуск по координате x , попадаем в точку $M_1(x_1, y_0)$. Далее, двигаясь параллельно оси ординат, приходим в точку $M_2(x_1, y_1)$ и т.д.

Важным является вопрос о сходимости рассматриваемого процесса оптимизации. Другими словами, будет ли последовательность значений целевой функции $f(M_0), f(M_1), \dots$ сходиться к наименьшему ее значению в данной области и, если будет, то как быстро? Это зависит от вида функции и выбора начального приближения.

К достоинствам метода покоординатного спуска следует отнести возможность использования простых алгоритмов одномерной оптимизации. Структурограмма метода покоординатного спуска представлена на рис. 7.2.

Предполагается, что итерации завершаются при выполнении условия (2).

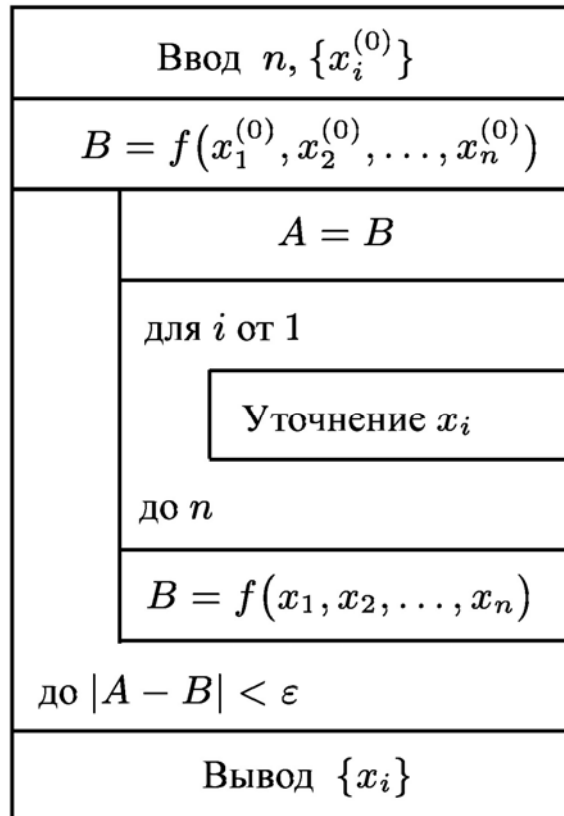


Рис. 7.2

3. Метод градиентного спуска. Направление наискорейшего спуска соответствует направлению наибольшего убывания функции. Из курса математического анализа известно, что направление наибольшего возрастания функции двух переменных $u = f(x, y)$ характеризуется ее *градиентом*

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_2,$$

где \vec{e}_1, \vec{e}_2 – единичные векторы в направлении координатных осей. Следовательно, направление, противоположное градиентному, укажет направление наибольшего убывания функции. Методы, основанные на выборе пути оптимизации с помощью градиента, называются *градиентными*.

Идея метода градиентного спуска состоит в следующем. Выбираем некоторую начальную точку $M_0(x^{(0)})$, $x^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$, и вычисляем в ней градиент рассматриваемой функции. Делаем шаг в направлении, обратном градиентному:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha^{(1)} \text{grad } f(M_0).$$

В результате приходим в точку $M_1(x^{(1)})$, значение функции в которой обычно меньше первоначального ($\alpha^{(1)} > 0$). Если это условие не выполнено, т.е. значение функции не изменилось или даже возросло, то нужно уменьшить шаг $\alpha^{(1)}$. В новой точке процедуру повторяем; вычисляем градиент и снова делаем шаг в обратном к нему направлении:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha^{(2)} \text{grad } f(M_1).$$

Процесс продолжается до получения наименьшего значения целевой функции. Момент окончания поиска наступит тогда, когда движение из полученной точки с любым шагом приводит к возрастанию значения целевой функции. Если минимум функции достигается внутри рассматриваемой функции, то в этой точке градиент равен нулю, что также может служить сигналом об окончании процесса оптимизации. Приблизительно момент окончания поиска можно определить аналогично тому, как это делается в других итерационных методах. Например, можно проверить близость значений целевой функции на двух итерационных методах. Например, можно проверить близость значений целевой функции на двух последовательных итерациях:

$$|f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})| < \varepsilon.$$

Метод градиентного спуска обладает тем же недостатком, что и метод покоординатного спуска: при наличии «оврагов» на поверхности сходимость метода очень медленная.

В описанном методе требуется вычислять на каждом шаге оптимизации градиент целевой функции $f(x)$:

$$\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}.$$

Формулы для частных производных можно получить в явном виде только в том случае, если целевая функция задана аналитически. В противном случае эти производные вычисляются с помощью численного дифференцирования:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\Delta x_i} [f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)], i = 1, 2, \dots, n.$$

При использовании градиентного спуска в задачах оптимизации основной объем вычислений приходится на вычисление градиента це-

левой функции в каждой точке траектории спуска. Поэтому целесообразно уменьшить количество таких точек без ущерба для самого решения. Это достигается в некоторых методах, являющихся модификациями градиентного спуска. Одним из них является *метод наискорейшего спуска*. Согласно этому методу после определения в начальной точке направления, противоположного градиенту целевой функции, решают одномерную задачу оптимизации, минимизируя функцию вдоль этого направления. Минимизируется функция

$$g(\alpha) = f\left(x^{(0)} - \alpha \text{grad } f(M_0)\right).$$

Для минимизации $g(\alpha)$ можно использовать один из методов одномерной оптимизации. Можно просто двигаться в направлении, противоположном градиенту, делая при этом не один шаг, а несколько шагов до тех пор, пока целевая функция не перестанет убывать. В найденной новой точке снова определяют направление спуска с помощью градиента и ищут новую точку минимума целевой функции. В этом методе спуск происходит гораздо более крупными шагами, и градиент функции вычисляется в меньшем числе точек.

Проиллюстрируем метод наискорейшего спуска на рис. 7.3 для случая двух независимых переменных $z = f(x, y)$ и отметим некоторые его особенности.

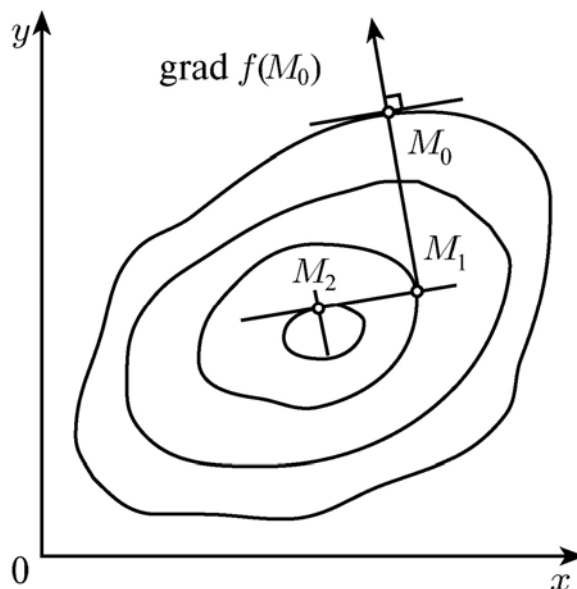


Рис. 7.3

Во-первых, можно показать, что градиент функции перпендикулярен линии уровня в данной точке. В градиентных методах спуск происходит по нормали к линии уровня.

Во-вторых, в точке, в которой достигается минимум целевой функции вдоль направления, производная функции по этому направлению обращается в нуль. Но производная функции равна нулю по направлению касательной к линии уровня. Отсюда следует, что градиент целевой функции в новой точке перпендикулярен направлению одномерной оптимизации на предыдущем шаге. Спуск на двух последовательных шагах производится во взаимно перпендикулярных направлениях.

Задание

1. Решить одномерную задачу оптимизации методом Ньютона.
2. Решить двумерную задачу оптимизации методом покоординатного спуска.
3. Решить двумерную задачу оптимизации методом градиентного спуска и методом ускоренного градиентного спуска.

Лабораторная работа № 8

Численный гармонический анализ

8.1. Тригонометрическое интерполирование

Операция представления функции $f(x)$ рядом Фурье называется *гармоническим анализом*. При практических расчетах мы вынуждены ограничиться только несколькими первыми членами ряда Фурье. В результате получаем лишь приближенное аналитическое выражение для функции $f(x)$ в виде тригонометрического многочлена N -го порядка:

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (1)$$

Кроме того, известные из математического анализа формулы для вычисления коэффициентов Фурье пригодны только в случае аналитического задания функции $f(x)$. На практике функция задается в виде таблицы или графика. Поэтому возникает задача приближенного нахождения коэффициентов Фурье по конечному числу имеющихся значений функции.

Сформулируем следующую задачу численного анализа, или, как его еще часто называют, практического гармонического анализа: *аппроксимировать на интервале $(0, T)$ тригонометрическим многочленом N -го порядка функцию $y = f(x)$, для которой известны m ее значений $y_k = f(x_k)$ при $x_k = \frac{kT}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$).*

Тригонометрический многочлен для функции, определенной на интервале $(0, T)$, имеет вид

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right) \quad (0 \leq x \leq T). \quad (2)$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются следующими соотношениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n \frac{2\pi}{T} x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N); \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n \frac{2\pi}{T} x dx, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Применяя в соотношениях (3) и (4) формулу прямоугольников для вычисления интегралов по значениям подынтегральных выражений в точках $x_k = \frac{kT}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$), имеем

$$a_n = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n \frac{2\pi k}{m}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N); \quad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \sin n \frac{2\pi k}{m}, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

Таким образом, тригонометрический многочлен (2), коэффициенты которого находятся по формулам (5) и (6), служат решением поставленной задачи.

Можно показать, что при $m > 2N$ многочлен (2) дает наилучшее приближение к функции $f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов, если его коэффициенты вычисляются по формулам (5) и (6). Другими словами, коэффициенты (5) и (6) минимизируют сумму квадратов отклонений

$$\delta_N^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \left[Q_N(x_k) - y_k \right]^2. \quad (7)$$

В частном случае при $m = 2N$ коэффициенты a_n и b_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) определяются соотношениями (5) и (6), а коэффициент a_N определяется по формуле

$$a_N = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k y_k. \quad (8)$$

Многочлен $Q_N(x)$ становится интерполяционным многочленом, поскольку в этом случае при любом b_N выполняются соотношения $Q_N(x_k) = y_k$ для всех $x_k = \frac{kT}{m}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$).

8.2. Численные методы определения коэффициентов Фурье

Пусть задан ряд Фурье, сходящийся к периодической функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad (1)$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (3)$$

В предыдущем пункте была сформулирована задача аппроксимации функции $f(x)$ тригонометрическим многочленом $Q_N(x)$. При вычислении коэффициентов Фурье использовали формулу прямоугольников.

В общем случае для приближенного вычисления определенных интегралов в коэффициентах ряда Фурье можно пользоваться любым численным методом вычисления. Воспользуемся формулой трапеций.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π . Из теории рядов Фурье известно, что вместо обычных пределов интегрирования от $-\pi$ до π при определении коэффициентов ряда Фурье можно рассматривать любой интервал интегрирования длиной 2π . Для удобства вычислений возьмем интервал $[0, 2\pi]$, тогда

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (4)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Разделим интервал $[0, 2\pi]$ на T равных частей, в результате получим точки деления $0, 1 \cdot \frac{2\pi}{N}, 2 \cdot \frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1) \frac{2\pi}{N}, 2\pi$. Соответствующие значения функции $f(x)$ в точках деления обозначим через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N = y_0$. Применяя формулу трапеций, получаем следующие приближенные формулы для вычисления коэффициентов Фурье:

$$\frac{N}{2} a_0 = \sum_{k=0}^{N-1} y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_{N-1}; \quad (6)$$

$$\frac{N}{2} a_m = \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos k \frac{2m\pi}{N} = y_0 + y_1 \cos \frac{2m\pi}{N} + \dots + y_{N-1} \cos(N-1) \frac{2m\pi}{N}; \quad (7)$$

$$\frac{N}{2}b_m = \sum_{k=1}^{N-1} y_k \operatorname{sik} \frac{2m\pi}{N} = y_1 \sin \frac{2m\pi}{N} + \dots + y_{N-1} \sin(N-1) \frac{2m\pi}{N}. \quad (8)$$

Пусть $N=12$, интервал $[0, 2\pi]$ разбит на 12 равных частей, используются значения аргумента $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{11\pi}{6}$. Им соответствуют значения функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$, которые умножаются на соответствующие значения: ± 1 ; $\pm \sin \frac{\pi}{6} = \pm 0,5$; $\pm \sin \frac{\pi}{3} = \pm 0,866$. Опуская громоздкие выкладки, получим

$$6a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11};$$

$$6a_1 = (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin \frac{\pi}{6} + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin \frac{\pi}{3} + (y_0 - y_6);$$

$$6a_2 = (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{6} + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9);$$

$$6a_3 = y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10};$$

$$6b_1 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin \frac{\pi}{6} + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9);$$

$$6b_2 = (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin \frac{\pi}{3};$$

$$6b_3 = y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11} \text{ и т.д.}$$

Чтобы свести к минимуму число необходимых арифметических операций для получения коэффициентов Фурье, можно использовать специальную вычислительную схему – *схему Рунге*.

Первый шаг. Выписывают значения функции $f(x)$ в следующем порядке:

$$y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$y_{11} y_{10} y_9 y_8 y_7$$

Второй шаг. Подсчитывают суммы и разности каждой пары значений, стоящих одно под другим. Полученные суммы и разности выписывают таким образом:

$$\begin{array}{r} y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \\ y_{11} y_{10} y_9 y_8 y_7 \\ \hline \text{суммы } u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 \\ \text{разности } v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \end{array} \quad (6)$$

Третий шаг. Аналогичные операции производят над суммами и разностями (6):

$$\begin{array}{r}
 u_0u_1u_2u_3 \quad v_1v_2v_3 \\
 u_6u_5u_4 \quad v_5v_4 \\
 \hline
 \text{суммы } e_0e_1e_2e_3 \quad g_1g_2g_3 \\
 \text{разности } d_0d_1d_2 \quad h_1h_2
 \end{array} \tag{7}$$

Четвертый шаг. Вычисляют значения a_m и b_m по приближенным формулам

$$\left. \begin{array}{l}
 6a_0 = e_0 + e_1 + e_2 + e_3, \\
 6a_1 = d_0 + 0,866d_1 + 0,5d_2, \\
 6a_2 = (e_0 - e_3) + 0,5(e_1 - e_2), \\
 6a_3 = d_0 - d_2, \\
 6b_1 = 0,5g_1 + 0,866g_2 + g_3, \\
 6b_2 = 0,866(h_1 + h_2), \\
 6b_3 = g_1 - g_3.
 \end{array} \right\} \tag{8}$$

8.3. Оценки коэффициентов Фурье

Достаточным условием существования ряда Фурье является интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. В этом случае коэффициенты Фурье имеют определенные конечные значения.

Может оказаться, что полученный ряд Фурье расходится или сходится к другой функции. Приведем без доказательства условия, при выполнении которых тригонометрический ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках непрерывности этой функции.

Теорема сходимости. *Если функция $f(x)$ кусочно непрерывна и кусочно дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится на всей числовой оси и сумма его $S(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π , равная*

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \tag{1}$$

в любой точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ и $S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

В частности, $S(x_0) = f(x_0)$, если в точке $x = x_0$ функция непрерывна, т.е. если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Если, сверх того, функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π , то ее ряд Фурье сходится для каждого значения x_0 и имеет сумму (1).

При выполнении условий теоремы сходимости очевидно, что $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Дадим более точные оценки коэффициентов Фурье, накладывая известные ограничения на поведение функции $f(x)$. Дадим более точные оценки коэффициентов Фурье.

Определение. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, принадлежит классу периодических функций $\tilde{C}^{(m)}$, если:

1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ вместе со своими производными до m -го порядка включительно;

2) $f^{(k)}(-\pi + 0) = f^{(k)}(\pi - 0)$ для $k = 0, 1, 2, \dots, m$, т.е. на концах отрезка $[-\pi, \pi]$ должны совпадать значения функции $f(x)$ и ее m производных.

Из условий 1 и 2 следует, что периодическое продолжение функции $f(x)$ принадлежит классу $C^{(m)}(-\infty, \infty)$.

Лемма. Если функция $f(x)$ принадлежит классу периодичности $\tilde{C}^{(m)}$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n есть бесконечно малые функции (при $n \rightarrow \infty$) порядка выше m относительно $\frac{1}{n}$:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right); \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Доказательство. После m -кратного интегрирования по частям коэффициентов Фурье будем иметь

$$a_n = \frac{1}{\pi n^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}m + nx\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}m + nx\right) dx.$$

Интегралы

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}m + nx\right) dx,$$

$$\varepsilon'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}m + nx\right) dx$$

с точностью до знака являются коэффициентами Фурье непрерывной по условию функции $f^{(m)}(x)$. Известно, что коэффициенты Фурье непрерывной функции, независимо от того, сходится или нет ее ряд Фурье, стремятся к нулю при неограниченном возрастании номера n . Это следует из того, что для любой кусочно непрерывной функции имеет место *неравенство Бесселя*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится и $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{n^m} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{\varepsilon'_n}{n^m},$$

то коэффициенты Фурье a_n и b_n функции $f(x)$ являются бесконечно малыми более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{n^m}$:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Замечание. Если $f^{(m)}(x)$ удовлетворяет условиям теоремы сходимости, то можно доказать, что

$$\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad \varepsilon'_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

В этом случае для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ получается лучшая оценка:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \quad \text{и} \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

8.4. Улучшение сходимости тригонометрических рядов Фурье методом А. Н. Крылова

Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно непрерывная и имеет кусочно непрерывные производные $f^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) до m -го порядка включительно. Тогда в силу теоремы сходимости (п. 8.3) функцию $f(x)$ во всех ее точках непрерывности можно представить тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

где a_n и b_n – коэффициенты Фурье. В общем случае коэффициенты Фурье медленно стремятся к нулю и практически пользоваться этим рядом затруднительно.

Идея метода А. Н. Крылова состоит в том, что из функции $f(x)$ выделяется элементарная функция $g(x)$, представляющая собой кусочно полиномиальную функцию. Она имеет те же разрывы, что и функция $f(x)$, причем ее производные $g^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) до m -го порядка включительно обладают такими же разрывами, как и соответствующие производные $f^{(i)}(x)$ данной функции $f(x)$. Кроме того, выполняются равенства

$$f^{(i)}(-\pi + 0) - g^{(i)}(-\pi + 0) = f^{(i)}(\pi - 0) - g^{(i)}(\pi - 0) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m).$$

В этом случае новая функция

$$\varphi(x) = f(x) - g(x)$$

будет принадлежать классу функций $\tilde{C}^{(m)}$.

Обозначим через α_n и β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$, получим

$$f(x) = g(x) + \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \right], \quad (2)$$

где α_n и β_n – бесконечно малые функции при $n \rightarrow \infty$ порядка выше m относительно $\frac{1}{n}$, т.е. ряд (2) будет быстро сходящимся.

Рассмотрим, как по заданной функции $f(x)$ строится вспомогательная функция $g(x)$. Для этого рекуррентным способом построим на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ последовательность функций $\sigma_0(x), \sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)$, обладающих следующим свойством:

$$\sigma_k^{(k)}(+0) - \sigma_k^{(k)}(-0) = \pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (3)$$

причем производные $\sigma_k^{(j)}(x)$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) непрерывны на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$.

Функцию $\sigma_0(x)$ определим следующим образом:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{при } -2\pi < x < 0, \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{при } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{при } x = -2\pi, 0, 2\pi. \end{cases} \quad (4)$$

График этой функции изображен на рис. 8.1

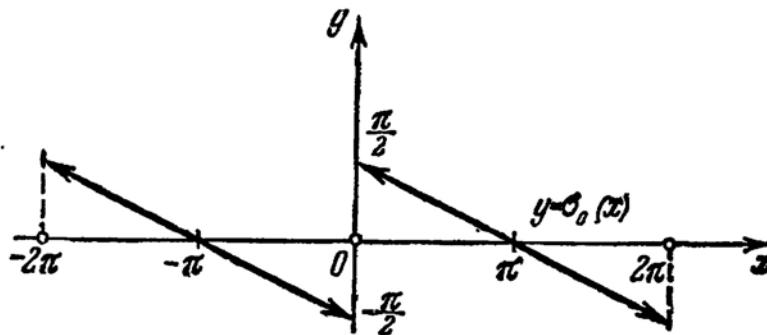


Рис. 8.1

Функция $\sigma_0(x)$ является нечетной, поэтому ее ряд Фурье содержит только синусы кратных дуг:

$$\sigma_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi - x}{2} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \right) = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\sigma_0(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots \quad (5)$$

Очевидно, что функция $\sigma_0(x)$ имеет разрыв в точке $x=0$ со скачком, равным π :

$$\sigma_0(+0) - \sigma_0(-0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Поэтому функция

$$\psi(x) = \sigma_0(x - x_0) \quad (-\pi \leq x \leq \pi; -\pi \leq x_0 \leq \pi)$$

имеет в точке x_0 такой же скачок, как и функция $\sigma_0(x)$:

$$\psi(x_0 + 0) - \psi(x_0 - 0) = \pi,$$

причем точка разрыва – единственная на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Функцию $\sigma_1(x)$ определим формулой

$$\sigma_1(x) = c_1 + \int_0^x \sigma_0(x) dx, \quad (6)$$

где c_1 – некоторая постоянная.

Интегрируя почленно ряд (5), получим

$$\sigma_1(x) = c_1 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} dx = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}. \quad (7)$$

Постоянную c_1 подберем так, чтобы свободный член ряда (7) был равен нулю

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

отсюда

$$c_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, очевидно, является свободным членом ряда Фурье функции $\int_0^x \sigma_0(x) dx$. Отсюда, пользуясь формулой (4), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx \int_0^x \sigma_0(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\pi^2}{4} - \frac{(\pi-x)^2}{4} \right] dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{4} - \frac{\pi^3}{12} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Поэтому

$$c_1 = -\frac{\pi^2}{6},$$

следовательно,

$$\sigma_1(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad (8)$$

причем

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\pi-x}{2} dx - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi-x)^2}{4} & \text{при } 0 \leq x \leq 2\pi, \\ -\int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} dx - \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\pi+x)^2}{4} & \text{при } -2\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

График функции $\sigma_1(x)$ изображен на рис. 8.2.

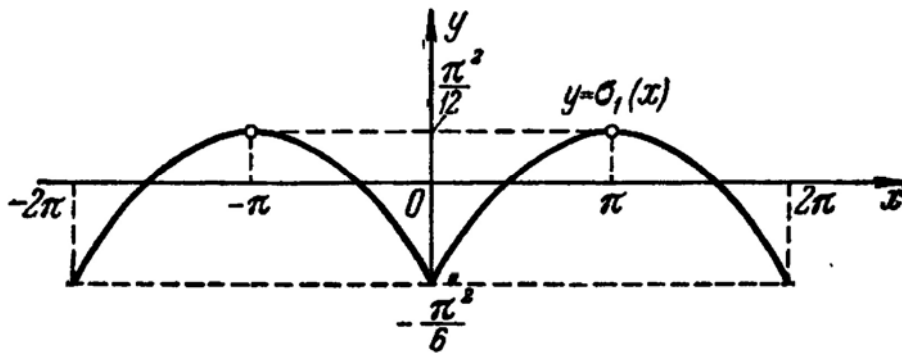


Рис. 8.2

Функция $\sigma_1(x)$ непрерывна на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$, но ее производная $\sigma_1'(x) = \sigma_0(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, причем

$$\sigma_1'(+0) - \sigma_1'(-0) = \pi.$$

Таким же образом определяются функции

$$\sigma_2(x) = \int_0^x \sigma_1(x) dx + c_2;$$

$$\sigma_3(x) = \int_0^x \sigma_2(x) dx + c_3;$$

.....

$$\sigma_m(x) = \int_0^x \sigma_{m-1}(x) dx + c_m,$$

где произвольные постоянные c_1, c_2, \dots, c_m подбираются так, чтобы свободный член соответствующего ряда Фурье был равен нулю, т.е. постоянные c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) последовательно находятся из условий

$$\int_0^\pi \left[c_k + \int_0^x \sigma_{k-1}(x) dx \right] dx = 0.$$

Функции $\sigma_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) и все производные до $(k-1)$ -го порядка включительно непрерывны на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. При этом, так как $\sigma_k^{(k)}(x) = \sigma_0(x)$, то

$$\sigma_k^{(k)}(+0) - \sigma_k^{(k)}(-0) = \pi \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

т.е. производная k -го порядка функции $\sigma_k(x)$ имеет разрыв при $x = 0$ со скачком π . Отсюда следует, что функция $\psi_k(x) = \sigma_k(x - x_0) \times (-\pi \leq x \leq \pi)$, полученная сдвигом функции $\sigma_k(x)$, имеет разрыв лишь k -й производной в точке $x = x_0$:

$$\psi_k^{(k)}(x_0 + 0) - \psi_k^{(k)}(x_0 - 0) = \pi.$$

Пусть теперь

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{k_0}^{(0)}$ — точки разрыва $f(x)$;

$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}$ — точки разрыва $f'(x)$;

.....

$x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}$ — точки разрыва $f^{(m)}(x)$,

причем некоторые из этих точек могут повторяться.

Для соответствующих скачков функции и ее производных введем обозначения:

$$f^{(l)}\left(x_j^{(l)} + 0\right) - f^{(l)}\left(x_j^{(l)} - 0\right) = h_j^{(l)} \quad (l = 0, 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k_l).$$

Определим функцию $g(x)$ (функция скачков) формулой

$$g(x) = \sum_{s=1}^{s=k_0} \frac{h_s^{(0)}}{\pi} \sigma_0\left(x - x_s^{(0)}\right) + \sum_{s=1}^{s=k_1} \frac{h_s^{(1)}}{\pi} \sigma_1\left(x - x_s^{(1)}\right) + \dots + \sum_{s=1}^{s=k_m} \frac{h_s^{(m)}}{\pi} \sigma_m\left(x - x_s^{(m)}\right). \quad (9)$$

Функция $g(x)$ обладает следующими свойствами:

1) в точках $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{k_0}^{(0)}$ функция $g(x)$ имеет разрывы, причем скачки ее в этих точках равны скачкам функции $f(x)$ в соответствующих точках:

$$\begin{aligned} g(x_l^{(0)} + 0) - g(x_l^{(0)} - 0) &= \\ &= \frac{h_l^{(0)}}{\pi} \left[\sigma_0\left(x_j - x_j + 0\right) - \sigma_0\left(x_j - x_j - 0\right) \right] = \frac{h_j^{(0)}}{\pi} \pi = h_j^{(0)}; \end{aligned}$$

2) производная $g^{(l)}(x)$ ($l = 1, 2, \dots, m$) разрывная в точках $x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, \dots, x_{k_l}^{(l)}$, причем

$$\begin{aligned} g^{(l)}\left(x_j^{(i)} + 0\right) - g^{(l)}\left(x_j^{(i)} - 0\right) &= \\ &= \frac{h_j^{(i)}}{\pi} \left[\sigma_i\left(x_l^{(i)} - x_l^{(i)} + 0\right) - \sigma_i\left(x_l^{(i)} - x_l^{(i)} - 0\right) \right] = \frac{h_j^{(i)}}{\pi} \pi = h_j^{(i)}, \end{aligned}$$

таким образом,

$$g^{(i)}\left(x_j + 0\right) - g^{(i)}\left(x_j - 0\right) = f^{(i)}\left(x_j + 0\right) - f^{(i)}\left(x_j - 0\right);$$

3) при $x \neq x_j^{(i)}$ функция $g(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков.

Пусть

$$\varphi(x) = f(x) - g(x). \quad (10)$$

В силу первого и второго свойств следует, что

$$\varphi^{(l)}\left(x_j^{(l)} + 0\right) - \varphi^{(l)}\left(x_j^{(l)} - 0\right) = 0 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, m),$$

т.е.

$$\varphi(x) \in \tilde{C}^{(m)}[-\pi, \pi].$$

Таким образом, для разложения функции $f(x)$ можно воспользоваться рядом Фурье (2). Пользуясь разложениями

$$\sigma_0(x - x_s^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_s^{(0)})}{n};$$

$$\sigma_1(x - x_s^{(1)}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x - x_s^{(1)})}{n^2};$$

$$\sigma_2(x - x_s^{(2)}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x - x_s^{(2)})}{n^3};$$

...

можно написать разложение в ряд Фурье функции $g(x)$.

В итоге ряд Фурье функции $f(x)$ состоит:

- 1) из медленно сходящейся части, суммирующейся к функции $g(x)$;
- 2) из быстро сходящегося остатка, представляющего ряд Фурье функции $\varphi(x) \in \tilde{C}^{(m)}[-\pi, \pi]$.

Задание

1. Необходимо составить таблицу значений функции в стандартном интервале, затем по формулам (6)–(8) вычислить первые коэффициенты и составить ряд Фурье.
2. Получить оценку коэффициентов Фурье.
3. Методом А. Н. Крылова улучшить сходимость ряда Фурье.

Список литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 2006. – 599 с.
2. Вержбицкий, В. М. Численные методы / В. М. Вержбицкий. – М. : Высш. шк., 2001. – 382 с.
3. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
4. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
5. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 327 с.
6. Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 1. – 303 с.
7. Крылов, В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – Т. 2. – 279 с.
8. Никольский, С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 255 с.
9. Турчак, Л. И. Основы вычислительных методов : учеб. пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Варианты заданий к лабораторной работе № 5

Вычислить двойные интегралы.

1. $\iint_S x dx dy$, где S – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

2. $\iint_S x dx dy$, где область интегрирования S ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;0)$, $B(0;2)$, и дугой окружности с центром в точке $C(0;1)$ радиуса 1.

3. $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{5^2 - x^2 - y^2}}$, где S – часть круга радиуса 5 с центром в точке $O(0;0)$, лежащая в первой четверти.

4. $\iint_S \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, где S – треугольник с вершинами $O(9;0)$, $A(1;-1)$, $B(1;1)$.

5. $\iint_S e^y dx dy$, где S – криволинейный треугольник OAB , ограниченный параболой $y^2 = x$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$.

6. $\iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, где S – параболический сегмент, ограниченный параболой $y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = x$.

7. $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$, где S ограничена кривыми $y = x$, $x + y = 2$, $x = 0$.

8. $\iint_S \sqrt{xy - y^2} dx dy$, где S – трапеция с вершинами $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(10;2)$, $D(2;2)$.

9. $\iint_S xy dx dy$, где S – область, ограниченная кривыми $x + y = 2$,
 $x^2 + y^2 = 2y$ ($x > 0$).

10. $\iint_S y dx dy$, где S – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;1)$,
 $B(0;1)$.

11. $\iint_S (x + 2y) dx dy$, где S ограничена кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

12. $\iint_S (4 - y) dx dy$, где S ограничена кривыми $x^2 = 4y$, $y = 1$,
 $x = 0$ ($x > 0$).

13. $\iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, где S ограничена кривыми $y = x \operatorname{tg} x$, $y = x$,
 $x = \frac{\pi}{8}$ ($x \geq \frac{\pi}{8}$).

14. $\iint_S \sqrt{4 + x^2} dx dy$, где S ограничена кривыми $y^2 - x^2 = 4$, $x = 2$,
 $x = 0$, $y = 0$ ($y > 0$).

15. $\iint_S e^{x+y} dx dy$, где S ограничена кривыми $y = e^x$, $x = 0$, $y = 2$.

16. $\iint_S x^2 y dx dy$, где S лежит в первой четверти и ограничена ося-
ми координат и дугой эллипса $x = 2 \cos t$, $y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

17. $\iint_S x dx dy$, где S ограничена осью Ox и аркой циклоиды
 $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

18. $\iint_S y dx dy$, где S ограничена осями координат и дугой астрои-
ды $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).

19. $\iint_S x^3 y^2 dx dy$, где S – круг $x^2 + y^2 \leq 4$.
20. $\iint_S (x^2 + y) dx dy$, где S – область, ограниченная параболой $y = x^2$, $y^2 = x$.
21. $\iint_S \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где S – область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.
22. $\iint_S \cos(x + y) dx dy$, где S – область, ограниченная прямыми $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.
23. $\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, где S – четверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$, лежащая в первом квадранте.
24. $\iint_S x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dx dy$, где S – область, ограниченная линией $x^3 + y^3 = 1$ и осями координат.
25. $\iint_S (12 - 2x - 3y) dx dy$, где S – область, ограниченная прямыми $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 6

Вычислить суммы рядов с точностью 0,001.

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$; | 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$. |
| 2. | 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{n}$; | 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$. |
| 3. | 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n \sqrt{2n+1}}$; | 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$. |

4. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^{2n}}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.
5. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{(2n+1)3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.
6. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.
7. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$.
8. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.
9. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.
10. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} nx^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}$.
11. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{nx^n}{3n-2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$.
12. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^n}{n!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.
13. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n+1} 2^n (x-1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.
14. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.
15. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{3^n (2n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

16. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (3n+1)(x-1)^n;$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$
17. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-3)^n}{(2n+1)4^n};$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}.$
18. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!};$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1} n^n}.$
19. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot 2^n \ln n};$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^{n!}.$
20. 1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{8^{n+1} n \ln^2 n};$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}.$
21. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n}}{(2n)!};$	2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n \ln n}.$
22. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n;$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$
23. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n\sqrt{n}};$	2) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}.$
24. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x-5)^n}{(3n+1)^{10}};$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n.$

Варианты заданий к лабораторной работе № 7

1. Найти наименьшее значение функции в указанном интервале:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 5; \quad [-2, 2].$

2) $y = x + 2\sqrt{x}; \quad [0, 4].$

3) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; \quad [-1, 2].$

4) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 2; \quad [-1, 1].$

- 5) $y = \sqrt{100 - x^2}; \quad (-6 \leq x \leq 8).$
- 6) $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}; \quad (0 \leq x \leq 1).$
- 7) $y = \frac{x - 1}{x + 1}; \quad (0 \leq x \leq 4).$
- 8) $y = \sin 2x - x; \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$
- 9) $y = 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x; \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right).$
- 10) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}; \quad (0 \leq x \leq 3).$
- 11) $y = \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}; \quad (0 \leq x \leq 1).$
- 12) $y = \frac{x}{1 + x^2}; \quad (-\infty < x < \infty).$
- 13) $y = \sqrt{x(10 - x)}; \quad (0 \leq x < \infty).$
- 14) $y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$
- 15) $y = \arccos x; \quad (0 \leq x \leq 1).$
- 16) $y = x^2; \quad [-1, 3].$
- 17) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1; \quad [-1, 5].$
- 18) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1; \quad [-10, 12].$
- 19) $y = -3x^4 + 6x^2; \quad [-2, 2].$
- 20) $y = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x - 1}; \quad [0, 1].$
- 21) $y = x e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad [-1, 1].$
- 22) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad [0, 2].$

$$23) y = \frac{x^3 - 1}{x + 1}; [0, 5].$$

$$24) y = x + 3\sqrt{2x}; [0, 6]$$

$$25) y = x^2 e^{-\frac{x}{2}}; [0, 1].$$

2. Решить задачу одномерной оптимизации.

1) Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

2) Число 36 разложить на два таких множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

3) Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3 , причем стороны основания относились бы, как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

4) Объем правильной треугольной призмы равен 27 см^3 . Какова должна быть сторона основания, чтобы его поверхность была наименьшей?

5) Открытый чан имеет форму цилиндра. При данном объеме 9 м^3 каковы должны быть радиус основания и высота цилиндра, чтобы его поверхность была наименьшей?

6) Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

7) Из круга вырезан сектор с центральным углом α . Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим?

8) Периметр равнобедренного треугольника равен 10 см. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

9) Периметр равнобедренного треугольника равен 10 см. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

10) Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса 10 см.

11) Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса 10 см.

12) На окружности дана точка A . Провести хорду BC параллельно касательной в точке A так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

13) Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса 10 см.

14) Найти высоту прямого круглого конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса 3 см.

15) Найти угол при вершине осевого сечения конуса наименьшей боковой поверхности, описанного около данного шара.

16) Через точку $P(1,4)$ провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

17) Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

18) Найти наименьший по площади эллипс, описанный около данного прямоугольника (площадь эллипса с полуосями $a = 3$ и $b = 2$ равна 6π).

19) На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1,4)$ и $B(3,0)$. Найти на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей.

20) На оси параболы $y^2 = 2x$ дана точка на расстоянии 1 от вершины. Указать абсциссу x ближайшей к ней точки кривой.

21) Полоса железа шириной 2 м должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (сечение желоба имеет форму дуги кругового сегмента). Найти значение центрального угла, опирающегося на эту дугу, при котором вместимость желоба будет наибольшей.

22) Миноносец стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега; с миноносца нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу от ближайшей к миноносцу точки берега. Если гонец развивает скорость пешком 5 км/ч, а на веслах – 4 км/ч, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

23) Прямо над центром круглой площадки радиуса $R = 10$ нужно повесить фонарь. На какой высоте нужно это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка (Степень освещения некоторой площадки прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

24) Картина в 1,4 м высотой повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаза наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен стать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятным для осмотра картины (чтобы угол зрения был наибольшим)?

25) Для какой точки P параболы $y^2 = 2x$ отрезок нормали в P , расположенный внутри кривой, имеет наименьшую длину?

3. Решить задачу двумерной оптимизации.

1) Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем $V = 5 \text{ м}^3$, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

2) При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости $V = 4 \text{ м}^3$ имеет наименьшую поверхность?

3) Из всех треугольников данного периметра, равного 2 м, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

4) Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности $S = 3 \text{ м}^2$, имеющий наибольший объем.

5) Представить положительное число 25 в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

6) На плоскости XOY найти точку $M(x, y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых ($x = 0, y = 0, x - y + 1 = 0$) была бы наименьшей.

7) Найти треугольник данного периметра, равного 2 м, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

8) На плоскости даны три материальные точки $P_1(0,1)$, $P_2(0,1)$, $P_3(1,1)$ с массами $m_1 = 10 \text{ г}$, $m_2 = 20 \text{ г}$, $m_3 = 30 \text{ г}$. При каком положении точки $P(x, y)$ квадратичный момент (момент инерции) данной системы точек относительно точки P (т.е. сумма $m_1(P_1P)^2 + m_2(P_2P)^2 + m_3(P_3P)^2$) будет наименьшим?

9) Через точку $M(1,1,1)$ провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

10) В эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

11) Определить наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок $\delta = 2$ см и емкостью (внутренней) $V = 5$ м³ так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

12) В данный шар радиуса 1 вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

13) Руслу двух рек приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

14) Разложить положительное число 9 на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

15) Представить положительное число 10 в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

16) На плоскости XOY найти точку, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0, y = 0, x + 2y - 16 = 0$ была бы наименьшей.

17) Через точку $(1, 2, 3)$ провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого ею от координатного трехгранника, был наименьшим.

18) Даны три точки $A(0, 0, 12), B(0, 0, 4), C(8, 0, 8)$. На плоскости Oxy найти такую точку D , чтобы сфера, проходящая через точки A, B, C, D , имела наименьший радиус.

19) В данный шар диаметра 6 вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

20) Представить положительное число 25 в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей.

21) Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали 10, имеющий наибольший объем.

22) Внутри четырехугольника найти точку, сумма квадратов расстояний которой от вершин была бы наименьшей.

23) В полушар радиуса $R = 3$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

24) В прямой круговой конус с радиусом основания $R = 3$ и высотой $H = 4$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

25) Руслу двух рек приближенно представляют параболу $y = 3x^2$ и прямую $2x - y - 5 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

Варианты заданий к лабораторной работе № 8

Разложить в ряд Фурье функции.

1. 1) $y(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 1 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x^2$ в интервале $(0, \pi)$.

2. 1) $y(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x^3$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

3. 1) $y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = |x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

4. 1) $y(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = e^x - 1$ в интервале $(0, 2\pi)$.

5. 1) $y(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

6. 1) $y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 1 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y = \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

7. 1) $y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

8. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = \operatorname{sh}x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

9. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y = \operatorname{sh}x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

10. 1) $y(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

11. 1) $y(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 0 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y = x \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

12. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x - 3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x \operatorname{sh}x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

13. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 3x - 2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x \operatorname{ch}x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

14. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x^2 \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

15. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

- 2) $y(x) = x^2 \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
16. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 2x+1 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = e^x x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
17. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x+3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = e^x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
18. 1) $y(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = e^x \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
19. 1) $y(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = e^x x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
20. 1) $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ e^x x & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
21. 1) $y(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^3 e^x & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = x e^x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
22. 1) $y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = x^2 e^x \sin x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
23. 1) $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x^3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$
- 2) $y(x) = x^2 e^x \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

24. 1) $y(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ x + 2 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = xe^x \cos x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

25. 1) $y(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in (-\pi, 0); \\ 1 - x & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

2) $y(x) = x^3 e^x$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Учебное издание

**Численные методы
математического анализа**

В двух частях

Часть 2

Составители:

**Добрынина Наталья Филипповна,
Тарасов Дмитрий Викторович**

Редактор *А. Г. Темникова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*

Подписано в печать 27.12.13.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 3,49.
Тираж 50. Заказ № 939.2.

Издательство ПГУ.
440026, Пенза, Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

